



Ottimizzazione
Teoria, metodi, applicazioni
Carlo Vercellis
McGraw-Hill, 2008

Indice

Prefazione	1
1 Modelli di ottimizzazione	3
1.1 Modelli matematici per le decisioni	4
1.1.1 Fasi di sviluppo di un modello	7
1.2 Esempi di problemi di ottimizzazione	9
1.2.1 Problema del commesso viaggiatore	9
1.2.2 Un problema di trasporto	12
1.2.3 Un problema di localizzazione	13
1.3 Modelli di ottimizzazione	15
1.4 Modelli di ottimizzazione matematica	21
1.4.1 Rappresentazione geometrica delle superfici di livello	23
1.4.2 Ottimizzazione matematica vincolata	23
1.5 Algoritmi iterativi di ottimizzazione	25
1.6 Ottimizzazione multi-obiettivo	27
1.6.1 Ottimizzazione multi-obiettivo senza priorità	28
1.6.2 Ottimizzazione multi-obiettivo con priorità	29
1.7 Note bibliografiche	30
2 Ottimizzazione lineare	31
2.1 Applicazioni dell'ottimizzazione lineare	31
2.1.1 Mix produttivo	32
2.1.2 Miscelazione	34
2.1.3 Trasporto	39
2.1.4 Pianificazione produttiva multi-periodo	41
2.1.5 Selezione di investimenti finanziari	44
2.1.6 Regressione	45
2.1.7 Classificazione	47
2.2 Formulazioni di ottimizzazione lineare	49
2.2.1 Forma generale uniforme	50
2.2.2 Forma standard	51
2.2.3 Forma generale mista	52
2.2.4 Equivalenza tra formulazioni	52
2.2.5 Assunzioni dell'ottimizzazione lineare	56
2.2.6 Ammissibilità, illimitatezza e ottimalità	59
2.3 Note bibliografiche	60



3	Geometria dell'ottimizzazione lineare	61
3.1	Geometria di problemi in due e tre dimensioni	62
3.1.1	Rappresentazione dei vincoli	63
3.1.2	Rappresentazione della funzione obiettivo	66
3.1.3	Soluzione del modello lineare	67
3.1.4	Problemi in tre dimensioni	68
3.1.5	Caratterizzazione delle soluzioni ottimali	69
3.1.6	Soluzioni ottimali multiple	71
3.1.7	Problemi inammissibili	72
3.1.8	Problemi illimitati	73
3.1.9	Vincoli attivi, inattivi e ridondanti	74
3.1.10	Problemi di minimizzazione	75
3.1.11	Geometria di problemi in forma standard	77
3.2	Poliedri, vertici e soluzioni di base	78
3.2.1	Insiemi convessi	78
3.2.2	Iperpiani, semispazi e poliedri	79
3.2.3	Punti estremi e vertici di un poliedro	83
3.2.4	Interpretazione geometrica delle soluzioni di base	85
3.2.5	Soluzioni di base	89
3.2.6	Equivalenza tra soluzioni di base, vertici e punti estremi	92
3.2.7	Numerosità delle soluzioni di base	94
3.2.8	Soluzioni di base degeneri	95
3.2.9	Soluzioni di base nello spazio dei vincoli	96
3.2.10	Soluzioni di base per problemi in forma generale	97
3.2.11	Corrispondenza tra basi e soluzioni di base	99
3.2.12	Soluzioni di base per variabili limitate	100
3.2.13	Esistenza di soluzioni di base ottimali	101
3.3	Note bibliografiche	105
4	Algoritmo del simplesso	107
4.1	Introduzione all'algoritmo del simplesso	108
4.1.1	Geometria del simplesso nello spazio delle variabili	110
4.2	Condizioni di ottimalità	113
4.3	Direzioni ammissibili e algoritmo del simplesso	118
4.4	Cambio di base per l'algoritmo del simplesso	120
4.5	Algoritmo del simplesso: fase II	126
4.5.1	Tableau del simplesso	131
4.6	Convergenza dell'algoritmo del simplesso	134
4.6.1	Degenerazione e regole anticiclaggio	135
4.7	Ricerca di una soluzione ammissibile - Fase I	139
4.8	Estensione al caso di variabili limitate	142
4.9	Complessità dell'algoritmo del simplesso	144
4.9.1	Conggettura di Hirsch	146
4.10	Il simplesso nello spazio dei vincoli	147
4.11	Note bibliografiche	151



5	Dualità	153
5.1	Esempi di problemi duali	154
5.1.1	Duale del problema di mix produttivo	154
5.1.2	Duale del problema della dieta	156
5.1.3	Duale del problema di trasporto	157
5.2	Problemi lineari duali	159
5.3	Teoremi di dualità	162
5.3.1	Dualità debole	162
5.3.2	Dualità forte	164
5.3.3	Schema riassuntivo dei legami tra primale e duale	165
5.3.4	Scarti complementari	167
5.4	Lemma di Farkas e teoremi delle alternative	169
5.5	Algoritmo del simplesso duale	172
5.6	Note bibliografiche	178
6	Analisi di sensitività e parametrica	179
6.1	Interpretazione geometrica	180
6.2	Analisi di sensitività	184
6.2.1	Variazioni nella funzione obiettivo	184
6.2.2	Variazioni nel termine noto	186
6.2.3	Variazioni nella matrice dei vincoli	188
6.3	Analisi parametrica	189
6.3.1	Analisi parametrica rispetto al termine noto	190
6.3.2	Caratterizzazione delle soluzioni ottimali del duale	196
6.3.3	Analisi parametrica rispetto ai coefficienti di costo	198
6.4	Prezzi ombra	199
6.4.1	Legame tra prezzi ombra e coefficienti di costo ridotto	202
6.5	Variazioni strutturali di un problema	205
6.5.1	Aggiunta di una nuova variabile	205
6.5.2	Aggiunta di un nuovo vincolo	207
6.6	Report del simplesso	209
6.7	Note bibliografiche	213
7	Coni, poliedri e ottimizzazione lineare	217
7.1	Lemma di Farkas e dualità	218
7.1.1	Teorema dell'iperpiano separatore	218
7.1.2	Lemma di Farkas e teorema di dualità forte	220
7.1.3	Altre formulazioni dei teoremi delle alternative	223
7.1.4	Una diversa formulazione del teorema di dualità forte	223
7.2	Proiezione di poliedri e metodo di eliminazione di Fourier-Motzkin	225
7.3	Rappresentazione di poliedri	228
7.3.1	Cono di recessione, raggi estremi e spazio di linealità	228
7.3.2	Involucri affini, conici e convessi	233
7.3.3	Teorema di Caratheodory	236
7.3.4	Teoremi di rappresentazione di Minkowsky-Weyl	238
7.3.5	Condizioni di illimitatezza dell'ottimizzazione lineare	245
7.3.6	Teorema fondamentale dell'ottimizzazione lineare	247
7.4	Note bibliografiche	248



8	Ottimizzazione intera	249
8.1	Applicazioni dell'ottimizzazione intera	250
8.1.1	Knapsack e capital budgeting	250
8.1.2	Pianificazione produttiva con lotti minimi	252
8.1.3	Pianificazione produttiva con costi fissi	254
8.1.4	Localizzazione di impianti	255
8.1.5	Scheduling	257
8.1.6	Vincoli either-or e disgiuntivi	258
8.1.7	Covering, packing e partitioning	259
8.1.8	Assegnazione	261
8.2	Proprietà dell'ottimizzazione intera	262
8.2.1	Rilasciamenti	263
8.2.2	Geometria dell'ottimizzazione intera	264
8.2.3	Formulazioni alternative e formulazione ideale	266
8.2.4	Unimodularità e formulazione ideale	270
8.3	Metodi dei piani di taglio	272
8.3.1	Taglio di Gomory	275
8.4	Metodi enumerativi	281
8.4.1	Algoritmo di branch and bound	283
8.5	Note bibliografiche	292
9	Ottimizzazione nei grafi	293
9.1	Grafi	293
9.2	Alberi di supporto di costo minimo	302
9.2.1	Modelli di ottimizzazione matematica	302
9.2.2	Algoritmo di Kruskal	305
9.2.3	Algoritmo di Prim	307
9.3	Problemi di cammino minimo	308
9.3.1	Modelli di ottimizzazione matematica	310
9.3.2	Algoritmo di Dijkstra	311
9.3.3	Algoritmo di Floyd-Warshall	315
9.4	Problemi di flusso	318
9.4.1	Problema di taglio minimo	322
9.4.2	Algoritmo di Ford-Fulkerson	323
9.5	Problema del commesso viaggiatore	329
9.5.1	Modelli di ottimizzazione matematica	330
9.6	Note bibliografiche	331
10	Ottimizzazione di progetti	333
10.1	Rappresentazione di progetti mediante digrafi	333
10.1.1	Scomposizione di un progetto in attività elementari	334
10.1.2	Digrafi con le attività sui nodi	335
10.1.3	Digrafi con le attività sugli archi	336
10.1.4	Identificazione di un cammino critico	336
10.1.5	Diagrammi di Gantt	339
10.2	Modelli probabilistici per l'analisi PERT	340
10.2.1	Distribuzione del tempo di completamento	342
10.2.2	Analisi dei costi	346
10.3	Modelli di ottimizzazione matematica	349
10.3.1	Progetti a risorse illimitate	349



10.3.2	Bilanciamento di tempi e costi	350
10.3.3	Progetti a risorse limitate	351
10.4	Note bibliografiche	354
11	Ottimizzazione non lineare	355
11.1	Funzioni convesse	356
11.2	Problemi di ottimizzazione non lineare	361
11.3	Applicazioni dell'ottimizzazione non lineare	364
11.3.1	Regressione con i minimi quadrati	364
11.3.2	Classificazione con regolarizzazione	364
11.3.3	Selezione di investimenti finanziari	365
11.3.4	Mix produttivo e trasporto con costi variabili	366
11.3.5	Mix produttivo con elasticità dei prezzi	367
11.3.6	Localizzazione e allocazione logistica	367
11.4	Geometria dell'ottimizzazione non lineare	368
11.5	Condizioni di esistenza di soluzioni ottimali	374
11.5.1	Ottimi locali e globali di funzioni convesse	376
11.6	Condizioni di ottimalità: problemi non vincolati	377
11.6.1	Condizioni necessarie del primo ordine	377
11.6.2	Condizioni necessarie e sufficienti per funzioni convesse	378
11.6.3	Condizioni necessarie e sufficienti del secondo ordine	378
11.6.4	Geometria dei punti stazionari	380
11.7	Dualità per problemi non lineari vincolati	383
11.7.1	Dualità debole e forte	385
11.7.2	Duale di problemi lineari	388
11.8	Condizioni di ottimalità: problemi vincolati	389
11.8.1	Condizioni di Karush-Kuhn-Tucker	389
11.8.2	Qualificazione dei vincoli e piano tangente	392
11.8.3	Condizioni necessarie del primo ordine	393
11.9	Note bibliografiche	396
12	Metodi di ottimizzazione non lineare	397
12.1	Metodi iterativi di discesa	397
12.2	Ottimizzazione non lineare non vincolata	399
12.2.1	Problemi unidimensionali	399
12.2.2	Metodi di approssimazione polinomiale	401
12.2.3	Metodo del gradiente	402
12.2.4	Metodo di Newton	403
12.2.5	Metodi Quasi-Newtoniani	404
12.3	Ottimizzazione non lineare vincolata	405
12.3.1	Metodi di penalità	406
12.3.2	Metodi di barriera	408
12.4	Metodi di ottimizzazione lineare a punti interni	410
12.5	Note bibliografiche	414



13 Ottimizzazione nei sistemi stocastici	415
13.1 Teoria delle decisioni	415
13.1.1 Decisioni ottimali in condizioni di rischio	418
13.1.2 Decisioni sequenziali e alberi di decisione	422
13.1.3 Valore atteso dell'informazione campionaria	427
13.1.4 Efficienza dell'informazione campionaria	427
13.1.5 Teoria dell'utilità	428
13.1.6 Decisioni ottimali in condizioni di incertezza	431
13.2 Teoria dei giochi e ottimizzazione	434
13.2.1 Equilibrio di Nash per strategie pure e miste	437
13.2.2 Strategie miste a due giocatori e dualità	439
13.2.3 Giochi differenziali e dualità	441
13.3 Note bibliografiche	442
A Algebra lineare e analisi	443
A.1 Notazioni	443
A.2 Vettori e matrici	444
A.3 Sistemi di equazioni e disequazioni lineari	448
A.4 Analisi	449
B Complessità degli algoritmi	455
Bibliografia	459
Indice	465